$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} = y(x-1)$

$\Leftrightarrow y^2 - 1 = y^2(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[1-(x-1)^2\right].y^2 = 1$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2x-x^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (car y>0) d'où : $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

B)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(\frac{1}{\cos x})} & si\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{2} & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) – a) $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

D'où : $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(\frac{1}{\cos x}) = 2$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} g(x) = \frac{1}{2} = g(\frac{\pi}{2})$; g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

b) * pour $x = \frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{1+\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2} = g(\frac{\pi}{2})$

* pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$f(\frac{1}{\cos x}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}{\frac{1}{\cos x}} + 1 = \cos x . \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} + 1 = \cos x . \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + 1$$

$= \cos x . \frac{\sin x}{\cos x} + 1$ car $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$= 1 + \sin x$ d'où : $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$

<u>conclusion</u> : $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

2) $g'(x) = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} \leq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

* g est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur $J = [\frac{1}{2}, 1]$,

3) –a): g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $g'(x) = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} \neq 0$

D'où : g^{-1} est dérivable sur $g([0, \frac{\pi}{2}[) =]\frac{1}{2}, 1]$ et : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn